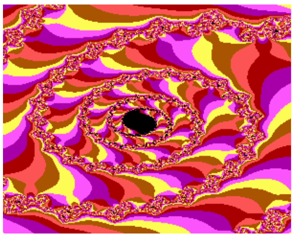
Красота, очарование и странность

Владимир Свиридов

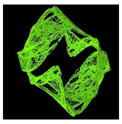


 # 1

Фрагмент одного из множеств Жюлиа, обнаруженный моей студенткой Таней Юдиной

Эта статья посвящается читательницам «Домашнего компьютера». Качества, составившие заголовок, несомненно присущи вам, поскольку вы принадлежите к лучшей половине человечества. А поскольку вы, вместе с тем, не ограничиваетесь чтением «Харперс Базар», а заглядываете и в наш журнал, я надеюсь, что вам интересно будет познакомиться с самыми красивыми, очаровательными и странными порождениями геометрии XX века.

Имя им — **фракталы**.



Нет правды в крайностях: истина всегда посередине и выше их. Фракталы обитают рядом с истиной.

 # 2

Это детища сухой математики, но они настолько эстетичны, что выставка фракталов, построенных с помощью компьютера, потрясла мир, а книга организаторов выставки, математиков Хайнца-Отто Пайтгена и Петера Рихтера, «Красота фракталов» раскупается как художественный альбом[1]. Да что там выставка фракталов! Готовя эту статью я наткнулся на выставку художников, пытающихся *имитировать* эстетику фракталов! (http://gallery.nsc.ru/biennial/caos_r.html, рис. 2)

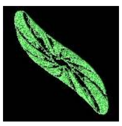
Они упорядоченны, но это не упорядоченность монотонного орнамента, повторяющего без изменений один и тот же мотив.

Они геометричны, но это геометрия не идеалиста Платона, искавшего везде отполированные формы правильных многогранников, а геометрия реального мира — ветвистого, пористого, шершавого, зазубренного, изъеденного. Не зря человек, давший фракталам имя, — польский математик Мандельброт с французским именем Бенуа, проработавший большую часть жизни на американскую корпорацию IBM, — назвал свой главный труд «Фрактальная геометрия природы».

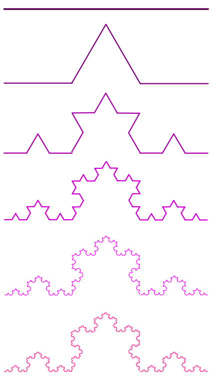
Козьма Прутков говорил: «Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы, а потому, что сии вещи не входят в круг наших понятий». Как только Мандельброт открыл понятие фрактала, оказалось, что мы буквально окружены ими. Фрактальны слитки металла и горные породы; фрактальны расположение ветвей, узоры листьев, капиллярная система растений; кровеносная, нервная, лимфатическая системы в организмах животных; фрактальны речные бассейны, поверхность облаков, линии морских побережий, горный рельеф…

«Облака — не сферы,
горы — не конусы,
линии берегов — не окружности,
и негладка древесная кора,
и непрям путь молнии».

Бенуа Мандельброт. «Фрактальная геометрия природы», 1982.



[1] Она издана и на русском языке. Я видел ее и в «Библио-глобусе», и в «Молодой гвардии» на Полянке.



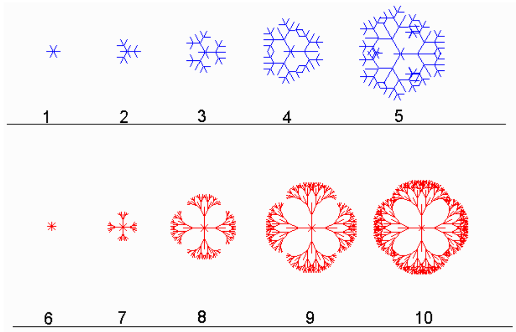
3

Основное свойство фракталов — самоподобие. Любой микроскопический фрагмент фрактала в том или ином отношении воспроизводит его глобальную структуру. В простейшем случае часть фрактала представляет собой просто уменьшенный целый фрактал.

Отсюда основной рецепт построения фракталов: возьми простой мотив и повторяй его, постоянно уменьшая размеры. В конце концов получится структура, воспроизводящая этот мотив во всех масштабах, — бесконечная лестница вглубь.

Берем отрезок, и среднюю его треть переламываем под углом 60° (рис. 3). Затем повторяем эту операцию с каждой из частей получившейся ломаной — и так до бесконечности. В конце концов мы получим простейший фрактал — триадную кривую, которую в 1904 году открыла математик Хельга фон Кох.

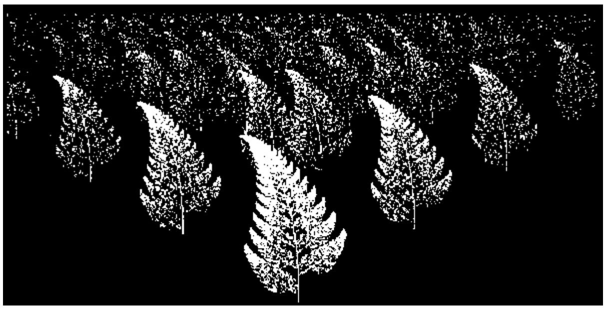
Вы можете сами построить и полюбоваться фракталами, напоминающими по форме снежинку, с помощью изящной (4,5 кбайт в дистрибутиве!) программки SnowFlake Александра Милюкова (www.am-soft.ru). На рис. 4 приведены два примера (кадры 1–5 и 6–10).



4

Если проявить чуть-чуть больше изобретательности, и на каждом шаге не только уменьшать основной мотив, но также смещать и поворачивать его, можно получить более интересные и реалистически выглядящие образования, например лист папоротника — или даже целые их заросли (рис. 5 и 6). А можно построить весьма правдоподобный фрактальный рельеф местности и покрыть ее очень симпатичным лесом. В 3D Studio Max, например, для генерации деревьев используется фрактальный алгоритм. И это не исключение — большинство текстур местности в современных компьютерных играх представляют собой фракталы (рис. 7).

5



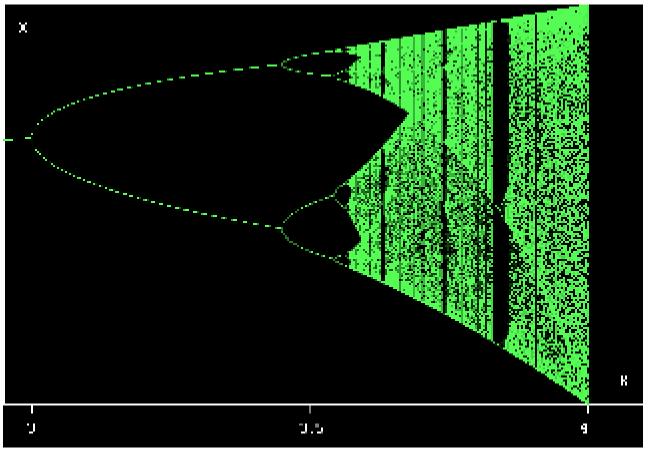
6

7 Горы, лес и облака на этой картине — фракталы

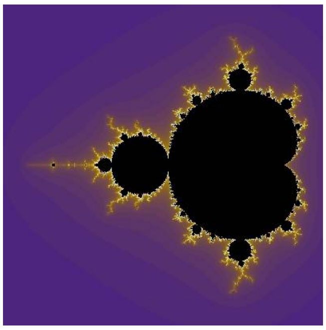
Идея бесконечного повторения простой операции используется для порождения еще более изощренных и удивительных структур.

Возьмем какое-нибудь число x_0 от 0 до 1 и рассчитаем $x_1 = k \cdot x_0 \cdot (1 - x_0)$. Затем по тому же рецепту (который на птичьем языке математиков носит неблагозвучное название: «отображение Ферхюльста») вычислим x_2, x_3 и так далее. Если коэффициент k меньше 3, то последовательность чисел x_i быстро стремится к постоянному значению, в чем несложно убедиться вручную или написав примитивную программку на любом языке. Но если взять k больше тройки, последовательность начинает метаться между двумя значениями, затем — четырьмя, восемью, и так далее, пока, наконец, при $k > 3{,}6$ ее поведение не станет совершенно беспорядочным — внешне. Но «если это безумие, то в нем есть какая-то система», что хорошо видно на картинке (рис. 8), которая показывает, какие значения могут принимать числа x_n в зависимости от k. Вы совершенно правы, структура, проявляющаяся на картинке — тоже фрактал, но фрактал сложный, подобие частей которого целому не сводится к простому изменению масштаба.

Самые знаменитые и популярные из фракталов — множества Жюлиа и Мандельброта — выращиваются повторением еще более простой формулы $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Трюк заключается в том, что и числа z_n, и константа c считаются комплексными. Кто знает, комплексные числа изображаются точками на плоскости. А кто еще не знает или уже не помнит — не забивайте себе голову, возьмите замечательную программу Fractal Explorer киевлян А. Сиротинского и О. Федоренко (http://skyscraper.fortunecity.com/binary/34/index.html) — она все посчитает сама и покажет готовый результат (рис.9). Программа богатая, и возиться с ней крайне интересно — для тех, кто склонен к интеллектуальным развлечениям. Если же вас привлекает просто красота, рекомендую миниатюру (9 кбайт) fractals.exe Алексея Словеснова (www.slovesnov.narod.ru), которая при запуске, не говоря худого слова, начинает показывать одно за другим множества Жюлиа (рис. 10)

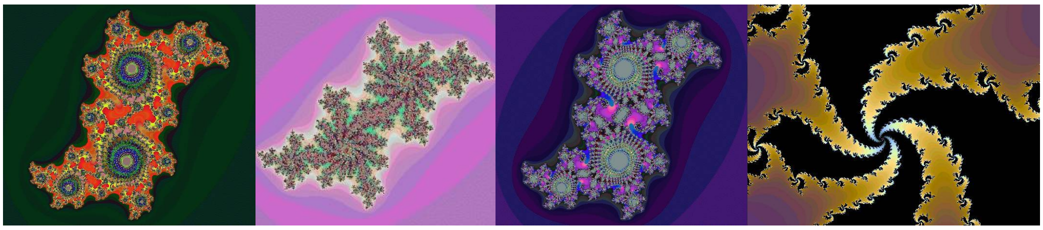


 # 8



 # 9 Множество Мандельброта

Цветные точки соответствуют таким значениям c, что последовательность чисел z_n, стартуя с $z_0 = 0$, убегает на бесконечность (цвет зависит от быстроты убегания).

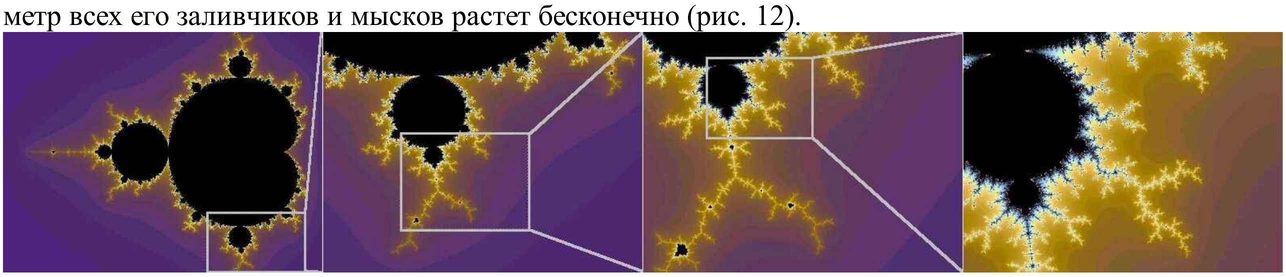


 # 10 Множества Жюлиа

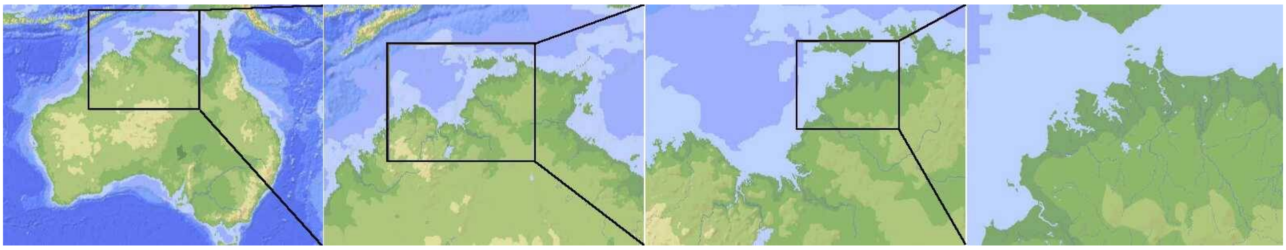
Здесь цветные точки соответствуют таким значениям z_0, что стартующая с них последовательность чисел z_n при данном значении c убегает на бесконечность. Форма множества Жюлиа зависит от c.

Безмерно множество Мандельброта, и никто не сможет пройти все закоулочки и извивы его берегов. Причину тому можно понять, еще раз взглянув на рис. 3: на каждом шаге изготовления фрактальной кривой Кох длина ее увеличивается в 4/3 раза. Поэтому путешественник по этой кривой обнаружит, что между ее началом и концом укладывается бесконечное число звеньев, общая длина которых также бесконечна. Берег Мандельброта также имеет бесконечно сложную структуру, которая не сглаживается ни при каком самом сильном увеличении (рис. 11).

Самое удивительное, что таким же свойством обладают реальные берега земных морей. Еще в 1901 году английский географ Ричардсон обратил внимание, что длина береговой линии существенно зависит от масштаба карты, по которой измеряется. Чем более крупномасштабными картами вы пользуетесь, тем более извилистым предстает берег, и с ростом подробности карты суммарный периметр всех его заливчиков и мысков растет бесконечно (рис. 12).

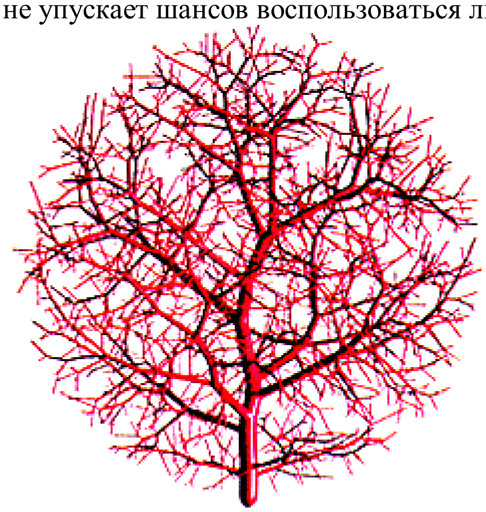


 # 11 Ни в каком масштабе «берег Мандельброта» не сглаживается



 # 12 Побережье Австралии — тоже. А уж норвежское…

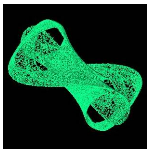
Все нормальные (то есть гладкие) линии, имеющие начало и конец, имеют и конечную длину. Если же длина кривой, соединяющей две точки, бесконечна, то эта кривая уже не совсем линия. Геометрия фракталов подтверждает: да, действительно, и кривая Кох, и берег множества Мандельброта, и побережья островов и континентов являются чем-то промежуточным между линией и лентой. За счет своей бесконечной извилистости они как бы приобретают дополнительное измерение. И природа не упускает шансов воспользоваться лишними измерениями своих фрактальных порождений!



 # 13 Фрактальная геометрия жизни

Например, давно известно, что частота дыхания у животных обратно пропорциональна корню *четвертой* степени из веса. Это обстоятельство ставило ученых в тупик: если считать, что объем кровеносной системы пропорционален весу, то есть *третьей* степени размеров тела, то и частота дыхания должна изменяться как корень *третьей* степени из веса! Откуда же природа берет четверку?

В прошлом году группа исследователей из университета Нью-Мексико предложила объяснение, основанное на идее о том, что эффективно устроенная кровеносная система должна максимально заполнять объем тела. А для этого она должна быть устроена фрактально (рис. 13), и объем такого фрактала оказывается пропорционален четвертой степени размеров. Четвертой, а не третьей! В своей статье в журнале *Science* авторы открытия пишут: «Хотя живые существа обитают в трехмерном пространстве, их внутренняя физиология и анатомия устроены так, как если бы они были четырехмерными… Фрактальная геометрия буквально придает жизни дополнительное измерение».



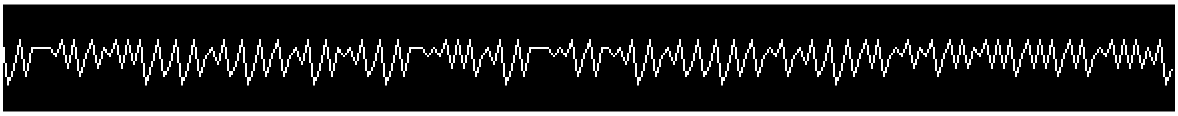
Странные зеленоватые фигурки на черном фоне, которые перемежают мой рассказ, — это траектории, описываемые некоторыми простыми уравнениями (вроде отображения Ферхюльста, но в трехмерном пространстве). Траектории эти[2], как вы уже догадались, фрактальны: они имеют тонкую структуру в любом масштабе. Однако, аналогично береговой линии или кровеносной системе, эти фракталы нерегулярны, не подчинены требованию *точного* самоподобия.

Это великое открытие XX века — открытие того, что простые, даже примитивные по своему устройству системы, могут иметь чрезвычайно сложное поведение, не описываемое никакой простой закономерностью (например, периодической). Такое поведение хаотично, но «хаос» в данном случае означает не отсутствие порядка а слишком сложный и нетривиальный порядок! По выражению Ю.А. Данилова из Курчатовского института, «при фрактальном подходе хаос перестает быть синонимом беспорядка и обретает тонкую структуру».

Идея о том, что хаос, связанный с фрактальными траекториями, — это порядок, но порядок очень сложный, легла в основу музыкального генератора FractMus 2000, созданного Густаво Диасом Хересом (www.geocities.com/SiliconValley/Haven/4386/).

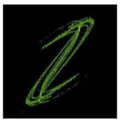
[2] Очень легко строятся с помощью все того же Fractal Explorer’a.

Что такое музыка? Это нечто среднее между абсолютно беспорядочным шумом и абсолютно упорядоченной монотонной нотой[3]; это свобода звуков, подчиненная строгим законам гармонии, и наоборот — это комбинирование внутренне упорядоченных звуковых конструкций по прихоти композитора. Но фрактальные траектории ведут себя очень похоже! Проследите, например, за последовательностью чисел, порождаемой отображением Ферхюльста при $k = 3{,}88$ (рис. 14): она то колеблется между двумя значениями, то перескакивает к колебанию между четырьмя; взрывается какофонией беспорядочно сменяющих друг друга чисел — и вдруг почти замерзает вблизи одного из них… Так вот, программа FractMus занимается тем, что генерирует фрактальную траекторию по одному из известных алгоритмов, и полученную последовательность чисел по простым правилам[4] переводит в последовательность нот. Вы буквально слышите гармонию фрактала! И знаете, иногда получаются очень интересные фразы. Конечно, FractMus не сочинит за вас симфонию — программист честно предупреждает об этом, — но как источник свежих музыкальных идей она вполне дееспособна, в чем убеждает прилагаемый к программе обширный набор пьес, которые созданы с ее помощью.



 # 14

Ну и, раз уж речь зашла о музыке, упомяну о программе Fractal Player Дмитрия Шипилова (www.sd77rus.narod.ru/). Нет, музыку она играет самую обычную, из MP3 и с аудио-CD, но вот в качестве цветомузыки показывает при этом некие медленно вращающиеся фрактальные образования. Если у вас есть время слушать музыку, глядя при этом не в телевизор, документ, окошко браузера или мэйлера, а на экран Fractal Player, то время провести можно весьма приятно.



 # 15 Экран Fractal Player

И последняя тема, которую нельзя пропустить, рассказывая о фракталах в компьютерном журнале, — это фрактальное сжатие изображений.

«Сжатие изображений» — слова, которые не оставляют равнодушным ни одного интернетчика. Web-мастера хотят показать, а потребители — увидеть большие, яркие и четкие картинки. А еще очень хочется кино — то есть картинок, сменяющих друг друга 30 раз в секунду. Но увы, даже небольшая картинка в оцифрованном виде представляет собой большой файл. Например, bmp-обои на Рабочий стол Windows размером 800×600 пикселов в 24-битном цвете тянут почти на полтора мегабайта. Скажите, сколько времени ваш модем будет вытягивать из Сети такую красоту? Вот потому и бьются программисты и математики, придумывая как бы картинку побольше запихнуть в файл размером поменьше. К сожалению, успехи на этом поприще трудно назвать впечатляющими: красота плохо сжимаема.

В середине 80-х годов математика Майкла Барнсли из Технологического университета Джорджии осенила блестящая идея. Ну хорошо, выращивая фракталы по простым правилам, можно получить очень правдоподобные листья, деревья, горы и так далее. А нельзя ли сделать наоборот: по заданной картинке найти такой компактный набор правил построения фрактала, чтобы тот, по крайней мере в каком-то диапазоне масштабов, был неотличим от исходной картинки? Тогда вместо нее можно было бы передавать по каналам связи и хранить на винчестере эти правила.

С целью коммерческой реализации идеи Барнсли уходит из университета и основывает фирму Iterated Systems, Inc. В январском номере журнала Byte за 1988 год он объявляет, что нашел алгоритм построения фрактала по данному изображению и демонстрирует несколько впечатляющих примеров.

[3] Ну, представьте себе жужжание неподвижно висящего комара — как вам такая музыка?

[4] Которые пользователь может подрегулировать.

Фотографию боливийской девушки, в bmp-формате занимающую около 3 мегабайт, он на глазах у удивленной публики («внимательно следите за моими руками!») восстанавливает из файла размером 5800 байт.

Увы, через некоторое время выяснилось, что Майкл малость лукавит. Оказалось, что все показанные им примеры построены вручную, а его математические теоремы играли при этом лишь вспомогательную роль. Барнсли проговаривается, что «толковому аспиранту требуется около 100 часов, чтобы закодировать изображение». В научных кругах начинают гулять рассказы о сжатии изображений по «алгоритму аспиранта»:

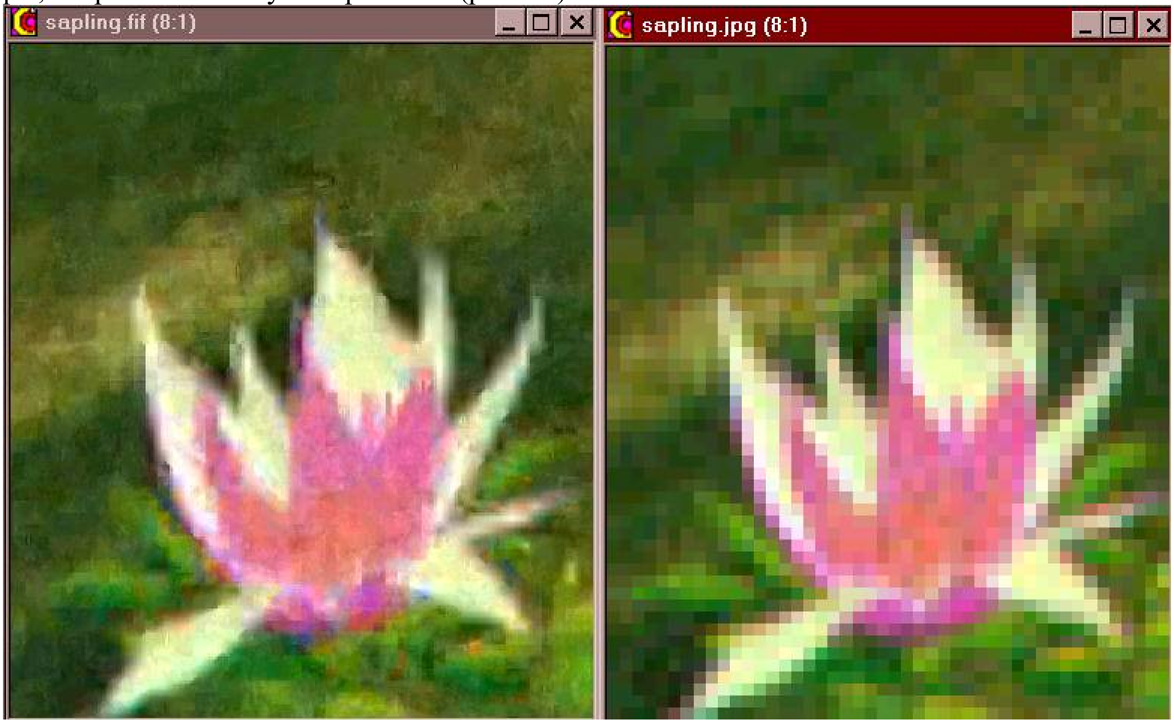
1. Поймайте аспиранта (желательно, толкового).
2. Всучите ему картинку.
3. Заприте его в комнате с графической станцией.
4. Ждите, пока он не построит фрактал, похожий на данную картинку.
5. Только после этого отоприте дверь из комнаты.

По иронии судьбы, именно аспиранту суждено было сделать «алгоритм аспиранта» устаревшим. Барнсли, в пику злопыхателям, все-таки нашел рецепт автоматической генерации фрактала, воспроизводящего заданное изображение (для этого оказалось необходимым предварительно разбивать картинку на более или менее однородные блоки), а его аспирант Арно Жакэн превратил математический алгоритм в компьютерную программу. Она была не очень утонченной и довольно медленной, но работала полностью самостоятельно. За это пришлось заплатить довольно высокую цену, забыв о степенях сжатия 10 000:1 и довольствуясь значениями от 4:1 до 100:1 (для 24-битного цвета) — а это уже сравнимо с тем, что может дать формат JPEG при том же качестве конечного изображения.

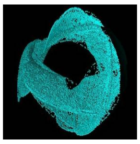
 # 16 Справа — исходное изображение (403 кбайт), слева — его фрактальный образ (244 кбайт)

В настоящее время фрактальное сжатие изображений неспешно развивается — даже слишком неспешно, и в этом, может быть, виновата Iterated Systems, запатентовавшая основные алгоритмы и не слишком склонная делиться ими. Фирма стремится продавать ноу-хау, а не программы, и в этом деле имеет несомненные достижения — ее технология, например, была использована Microsoft при создании знаменитой энциклопедии Encarta.

Единственная коммерческая программа для фрактального сжатия изображений — Fractal Imager, образца 1996 г., — уже не поддерживается Iterated Systems, но все еще может быть найдена в Сети (например, ftp://ftp.km.ru/pub/v01/Soft/WWW/fi11w32.exe). Ну, что про нее сказать… Программа работает: конвертирует графические файлы основных форматов во фрактальное изображение (.fif) и обратно. Обычно fif-файл получается несколько меньше, чем jpg при сравнимом качестве изображения (рис. 16). Но иногда бывает и наоборот — причем я так и не уловил, от чего это зависит. Самое интересное начинается, если рассматривать картинки со все большим увеличением. jpg-файлы почти сразу демонстрируют свою дискретную природу — появляется пресловутая «лесенка». А вот fif-файлы, как и положено фракталам, с ростом увеличения показывают все новую степень детализации фактуры, сохраняя эстетику изображения (рис. 17).



 # 17 То же самое, что на рис. 16, но увеличение не 1:2, а 8:1



Название этой статьи таит некий умысел автора. Я старался показать, что в самых сухих и рационализированных областях человеческой деятельности бьют подземные ключи поэзии и художеств. И геометрия фракталов — не исключительный случай. Например, очарование, красота и странность — это не только эстетические качества. В физике так называют квантовые числа, описывающие свойства элементарных частиц. «Нестранный очарованный мезон» — вполне рабочий физический термин. Но, согласитесь, чтобы придумать такую терминологию, надо быть поэтом.

Природа придерживается законов сохранения красоты, странности и очарования — правда, для элементарных частиц они выполняются нестрого. Я хотел бы пожелать читательницам «ДК», чтобы для них эти законы выполнялись всегда и без исключений.