

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа №1. Моделирование гармонического осциллятора	4
Лабораторная работа №2. Исследование экологической динамики в модели «хищник-жертва» Лотки-Вольтерра	11
Лабораторная работа №3. Моделирование генератора Ван-дер-Поля	14
Лабораторная работа №4. Исследование отображения Ферхюльста	18
Лабораторная работа №5. Исследование множества Жюлиа и Мандельброта	23
Литература	29
Приложение. Распечатки фрагментов программ лабораторных работ по курсу «Нелинейная динамика» на языке Quick BASIC	30

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

1. Введение

А. Линейный гармонический осциллятор

Рассмотрим тело, массой m , прикрепленное к концу пружины, один из концов которой жестко закреплен. Тело может скользить по горизонтальной поверхности без трения. Будем описывать положение тела координатой x и примем точку $x = 0$ в качестве положения равновесия, т.е. положения, в котором пружина не натянута. Если тело сместить из положения равновесия $x = 0$ и затем отпустить, то оно будет колебаться в горизонтальном направлении. При малых смещениях x сила, действующая на тело с координатой x , является линейной относительно x (закон Гука):

$$F = - k x, \quad (1)$$

здесь k – силовая константа, называемая жесткостью пружины. Знак минус указывает на то, что сила стремится вернуть тело в положение равновесия. Уравнение движения тела в соответствии со вторым законом Ньютона можно написать в виде

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t), \quad (2)$$

или

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (3)$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – собственная частота колебательной системы.

Уравнение (3) пример линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, поскольку в него входят только первые степени переменной x и ее производные. Движение, описываемое уравнением (3), называется простым гармоническим колебанием, а система, совершающая гармонические колебания, называется гармоническим осциллятором. Решение дифференциального уравнения (3) имеет вид

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t. \quad (4)$$

Константы A и B определяются из так называемых начальных условий (НУ), которые в данном случае определяются, как

$$x(t = 0) = x_0, v(t = 0) = v_0. \quad (5)$$

Первое из условий (5) определяет задание начального смещения x_0 в начальный момент времени $t = 0$, а второе – начальной скорости в тот же начальный момент времени $t = 0$.

С учетом НУ (5) решение (4) примет вид

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (6)$$

Поскольку сумма двух гармонических колебаний с одинаковыми частотами представляет собой также гармоническое колебание с такой же частотой, то решение (6) можно представить в виде

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (7)$$

где

$$C = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / \omega_0^2}, \quad (8)$$

$$\varphi = -\arctg(v_0 / x_0 \omega_0), \quad (9)$$

амплитуда и начальная фаза гармонического колебания (7) соответственно, определяемые через НУ.

В. Линейный гармонический осциллятор в среде с вязким трением

Дифференциальное уравнение (3) описывает движение гармонического осциллятора в вакууме. При движении тела в среде (в воздухе, воде, масле и т.п.) на него со стороны среды будет действовать сила вязкого трения, которая имеет вид

$$F = -\alpha v, \quad (10)$$

где α – коэффициент трения, v – скорость тела. Тогда уравнение движения тела примет вид

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \alpha v(t), \quad (11)$$

или

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \quad (12)$$

Здесь $2\gamma = \alpha / m$, γ – так называемый коэффициент затухания.

Дифференциальное уравнение (12) также линейное, однородное, второго порядка. Его общее решение имеет вид:

а) для случая малого затухания, $\gamma < \omega_0$

$$x(t) = D \exp(-\gamma t) \cos \omega_0 t + E \exp(-\gamma t) \sin \omega_0 t ; \quad (13)$$

б) для случая большого затухания, $\gamma > \omega_0$

$$x(t) = D \exp[(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t] + E \exp[(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t]; \quad (14)$$

в) для пограничного случая $\gamma = \omega_0$

$$x(t) = D \exp(-\gamma t) + Et \exp(-\gamma t). \quad (15)$$

Константы D и E определяются из НУ (5).

Решение (13) можно также представить в виде

$$x(t) = F \exp(-\gamma t) \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (16)$$

С учетом НУ константы F и α определяются следующим образом:

$$F = x_0^2 + \left(\frac{v_0 + x_0 \gamma}{\omega_0} \right)^2, \quad \alpha = -\arctg \left[\frac{v_0 + x_0 \gamma}{x_0 \omega_0} \right]. \quad (17)$$

Здесь F – амплитуда и α – начальная фаза колебания (14). Колебания вида (13) или (16) называются затухающими гармоническими колебаниями. Движение гармонического осциллятора вида (14) и (15) называют аperiодическим.

C. Математический маятник

Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из частицы массой m , прикрепленной к нижнему концу жесткого стержня длиной l с пренебрежимо малой массой, верхний конец которого вращается без трения в точке подвеса. Если груз вывести из положения равновесия и отпустить, то маятник будет совершать колебания в вертикальной плоскости (рис. 1).

Поскольку движение частицы будет происходить по дуге окружности радиуса l с центром в точке O, то положение частицы характеризуется длиной дуги l и углом отклонения от вертикали θ .

В соответствии с основным законом динамики вращательного движения

$$J \frac{d\Omega}{dt} = K_z, \quad (18)$$

где J – момент инерции частицы с массой m , $\frac{d\Omega}{dt}$ – угловое ускорение вращения, Ω – угловая скорость вращения, K_z – проекция на ось вращения z (ось вращения проходит через точку подвеса O) момента силы, вызывающей вращение, уравнение движения математического маятника запишется в виде

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta, \quad (19)$$

Знак минус в правой части уравнения (19) указывает на то, что возникающий при увеличении угла отклонения θ момент силы K_z стремится уменьшить это увеличение. Уравнение (19) можно представить в виде

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad (20)$$

Уравнение (20) является примером нелинейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, поскольку в него входит $\sin \theta$, а не θ . Большинство нелинейных дифференциальных уравнений не имеет аналитических решений в элементарных функциях и (20) не является исключением.

Однако, если амплитуда колебаний маятника достаточно мала, то $\sin \theta \approx \theta$ и (20) можно переписать в виде

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (21)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ – собственная частота, $\theta \ll 1$. То есть, при малых углах отклонения от вертикали θ математический маятник является гармоническим осциллятором.

Если сопоставить переменные x и θ , то уравнения (3) и (21) имеют одинаковый вид, и можно сразу сделать вывод, что для $\theta \ll 1$ период математического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (22)$$

а зависимость $\theta(t)$ определяется выражением

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \theta^*),$$

где константы θ_0 и θ^* определяются из начальных условий вида

$$\theta(t=0) = \theta_0, \quad \Omega(t=0) = \Omega_0.$$

Один из способов получить представление о движении маятника в случае больших амплитуд ($\theta \gg 1$) – численно решить уравнение (20).

D. Алгоритм Эйлера

Аналитическое решение дифференциального уравнения (12) представлено формулами (13-15). Найдем теперь численное решение линейного диффе-

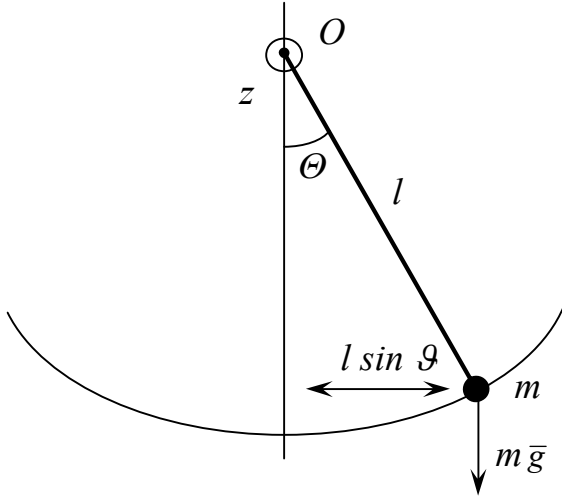


Рис. 1

ренциального уравнения (12), чтобы впоследствии использовать его для решения нелинейного дифференциального уравнения (20).

Разобьем временной интервал $(0, T)$ на n малых частей Δt ($n = T / \Delta t$). Здесь T — период функции (13). Пусть при $t_0 = 0$ $x = x_0$. Приближенное значение функции $x(t)$ в близлежащей точке $t_1 = t_0 + \Delta t$ можно найти по формуле

$$x_1 = x_0 + \Delta x \approx x_0 + \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} \Delta t. \quad (23)$$

Мы можем повторять эту процедуру еще раз и найти значение x в точке

$$t_2 = t_1 + \Delta t :$$

$$x_2 = x(t_1 + \Delta t) \approx x_1 + \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=t_1} \Delta t \quad (24)$$

Таким образом, приближенное значение функции в любой точке можно вычислить по итерационной формуле

$$x_n = x_{n-1} + v(t_{n-1})\Delta t, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (25)$$

Данный метод называется методом касательных или методом Эйлера. Метод будет давать хорошее приближение к истинному значению, если приращение аргумента Δt достаточно мало.

Чтобы строить решение по формуле (25), необходимо знать значение скорости v_n в каждый дискретный момент времени t_n . Для этого умножим дифференциальное уравнение (12) на dt и проинтегрируем уравнение в пределах от t_1 до t_2 при условии малости величины Δt :

$$\int_{t_1}^{t_2} dv + 2\gamma \int_{t_1}^{t_2} v dt + \omega_0^2 \int_{t_1}^{t_2} x dt = 0. \quad (26)$$

Приближенно результат интегрирования можно написать

$$v(t_2) - v(t_1) + 2\gamma v(t_1)\Delta t + \omega_0^2 x(t_1)\Delta t = 0 \quad (27)$$

или

$$v(t_2) = v(t_1) - 2\gamma v(t_1)\Delta t - \omega_0^2 x(t_1)\Delta t. \quad (28)$$

Таким образом, приближенное значение функции $v(t)$ в любой точке

$t_n = t_o + n\Delta t$ можно вычислить по итерационной формуле

$$v(t_n) = v(t_{n-1}) - 2\gamma v(t_{n-1})\Delta t - \omega_o^2 x(t_{n-1})\Delta t. \quad (29)$$

Формулы (29) и (25) позволяют получить приближенное решение дифференциального уравнения (12) с заданными НУ.

2. Порядок выполнения работы

- 2.1 Написать программу приближенного решения дифференциального уравнения (12) с заданными НУ по формулам (25) и (29). Графики функций $x(t)$, $v(t)$ и фазовую траекторию движения $v(x)$ представить на дисплее компьютера.
- 2.2 Используя программу линейного осциллятора с затуханием из п. 2.1, представить на дисплее компьютера графики функций $x(t)$, $v(t)$, $v(x)$ для линейного осциллятора без затухания.
- 2.3 Используя программу линейного осциллятора с затуханием из п. 2.1, представить на дисплее компьютера графики функций $\theta(t)$, $\Omega(t)$, $\Omega(\theta)$ для математического маятника для случая малых и больших амплитуд колебаний.

Указание

Ниже представлен алгоритм программы *oscillator* линейного осциллятора с затуханием.

1. Ввести начальные условия задачи x_o , v_o , и параметры задачи - ω_o, γ .
2. Определить период колебаний T .
3. Ввести число периодов *nperiods*.
4. Ввести константу, определяющую, какую долю периода должен быть шаг по времени *dolia*.
5. Определить величину шага по времени *deltat*.
6. Открыть файл данных для записи с помощью оператора *OPEN*.
7. Блок рисования зависимости $x=x(t)$.
8. Блок рисования зависимости $v=v(t)$.
9. Блок рисования зависимости $v=v(x)$.

В приложении приведен фрагмент программы *oscillator* рисования зависимости $x = x(t)$. Блоки рисования зависимостей $v=v(t)$, $v=v(x)$ выполнить самостоятельно.

3. Контрольные вопросы

- 3.1. Дифференциальное уравнение линейного гармонического осциллятора. Общее решение. Решение с заданными начальными условиями. Фазовая траектория линейного гармонического осциллятора.
- 3.2. Дифференциальное уравнение линейного гармонического осциллятора в среде с вязким трением. Общее решение для случаев малого затухания в системе ($\gamma < \omega_0$), большого затухания в системе ($\gamma > \omega_0$) и пограничного случая ($\gamma = \omega_0$). Решения с заданными начальными условиями. Фазовая траектория линейного гармонического осциллятора в среде с вязким трением для случаев малого и большого затухания.
- 3.3. Дифференциальное уравнение линейного гармонического осциллятора с отрицательным затуханием. Общее решение. Фазовая траектория линейного гармонического осциллятора с отрицательным затуханием. Примеры физических систем с отрицательным затуханием.
- 3.4. Дифференциальное уравнение математического маятника. Численное решение этого уравнения с заданными начальными условиями. Фазовая траектория математического маятника.
- 3.5. Определить искажение гармонического осциллятора, вызванное наличием ангармонических поправок к потенциальной энергии:

$$\text{а) } \delta U = (1/3)m\alpha x^3, \quad \alpha = \text{const}; \quad \text{б) } \delta U = (1/4)m\beta x^4, \quad \beta = \text{const}.$$

- 3.6. Определить искажение гармонического осциллятора, вызванное наличием ангармонической поправки к кинетической энергии:

$$\delta T = (1/2)m\gamma x\dot{x}^2.$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2 ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В МОДЕЛИ «ХИЩНИК-ЖЕРТВА» ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРА

1. Введение

Пусть $X(t)$ – численность популяции жертвы (например, зайцев, обитающих в данном лесу) в момент времени t . X может меняться за счет естественного прироста и естественной смертности. Скорость как того, так и другого процесса пропорциональна X :

$$\frac{dX}{dt} = A_+ X - A_- X = k_1 X. \quad (30)$$

Здесь k – коэффициент воспроизводства, A_+ – коэффициент рождаемости, A_- – коэффициент смертности. Для живущих видов, как правило, $k_1 > 0$, иначе вид вымер бы.

Но в лесу живут хищники, например, лисы, которые поедают зайцев. Скорость убывания числа зайцев очевидно пропорциональна числу встреч зайцев с лисами, которые, в свою очередь, пропорциональны как числу зайцев X , так и числу лис Y . Поэтому уравнение динамики популяции зайцев следует уточнить так:

$$\frac{dX}{dt} = k_1 X - k_2 XY. \quad (31)$$

Обратимся теперь к популяции лис. В отсутствии пищи – зайцев – она вымирала бы:

$$\frac{dY}{dt} = -k_3 Y. \quad (32)$$

Если зайцы есть, и если их едят, то в правую часть следует добавить положительное слагаемое, которое разумно предположить также пропорциональным числу встреч лис с зайцами, т.е.:

$$\frac{dY}{dt} = -k_3 Y + k_4 XY. \quad (33)$$

Величины k_1, k_2, k_3, k_4 являются параметрами данной экосистемы. Уравнения (31) и (33) в совокупности описывают модель «хищник-жертва» Лотки-Вольтерра.

Выясним, возможно ли в модели Лотки-Вольтерра равновесие, т.е. состояние системы, не меняющееся с течением времени:

$$\frac{dX}{dt} = 0; \quad \frac{dY}{dt} = 0. \quad (34)$$

Имеем

$$\begin{aligned} k_1 X - k_2 XY &= 0, \\ -k_3 Y + k_4 XY &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Система имеет два решения: тривиальное $X=0$; $Y=0$ и нетривиальное

$$Y = \bar{Y} = k_1 / k_2; X = \bar{X} = k_3 / k_4$$

\bar{Y} и \bar{X} – равновесные значения численности популяции лис и зайцев соответственно.

Нетривиальное решение описывает ситуацию, когда естественная убыль популяции зайцев и поедание их лисами в точности компенсируется естественным приростом. С другой стороны, лисы поедают столько зайцев, чтобы выжить и произвести себе на смену потомство не больше не меньше, чем нужно для простого воспроизводства.

В реальном лесу такое точное равновесие вряд ли возможно. Год может быть засушливый или холодный, зайцев могут поедать волки, лис могут поедать хищные птицы и т.д.

Введем новые безразмерные переменные

$$\xi = \frac{X}{\bar{X}}, \eta = \frac{Y}{\bar{Y}} \quad (36)$$

В переменных ξ и η система дифференциальных уравнений (31) и (33) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \xi(1-\eta)k_1 \\ \frac{d\eta}{dt} &= \eta(\xi-1)k_3 \end{aligned} \quad (37)$$

Пусть $\beta = k_3 / k_1$. Если принять $k_3 = 1$ то $\beta = 1$.

Применяя к дифференциальным уравнениям системы (37) метод Эйлера, можно получить следующие итерационные формулы для вычисления переменных ξ и η :

$$\xi_{n+1} = \xi_n + (1 - \eta_n) \xi_n \Delta t \quad (38)$$

$$\eta_{n+1} = \eta_n + \eta_n (\xi_{n+1} - 1) \beta \Delta t \quad (39)$$

2. Порядок выполнения работы

Написать программу *LV – model* приближенного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, описываемой уравнениями (31) и (33) с заданными начальными условиями, используя итерационные формулы (38) и (39). Графики функций $\xi(t), \eta(t), \eta(\xi)$ представить на дисплее компьютера.

Указание

Ниже представлен алгоритм программы построения графиков функций $\xi(t), \eta(t), \eta(\xi)$.

1. Ввести равновесные значения численности зайцев и лис *hareseq, foxesq*.
2. Ввести начальные значения численности зайцев и лис- *hares0, foxes0*.
3. Ввести нормированные значения численности зайцев и лис ξ и η .
4. Ввести величины $\beta, \Delta t$.
5. Открыть файл для записи данных с помощью оператора *OPEN*.
6. Организовать счетчик, индицирующий численность зайцев и лис в текущий момент времени.
7. Блок рисования зависимости $\xi(t)$.
8. Блок рисования зависимости $\eta(t)$.
9. Блок рисования зависимости $\xi(\eta)$.

В приложении приведен фрагмент программы *LV – model* рисования зависимости $\xi(t)$. Блоки рисования зависимостей $\eta(t)$ и $\xi(\eta)$ выполнить самостоятельно.

3. Контрольные вопросы

- 3.1. Сущность модели хищник-жертва Лотки-Вольтерра.
- 3.2. Равновесие в модели Лотки-Вольтерра.
- 3.3. Гармонические колебания как малые колебания в модели Лотки-Вольтерра.
- 3.4. Фазовый портрет в модели Лотки-Вольтерра.
- 3.5. Интеграл движения в модели Лотки-Вольтерра.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3 МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕНЕРАТОРА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

1. Введение

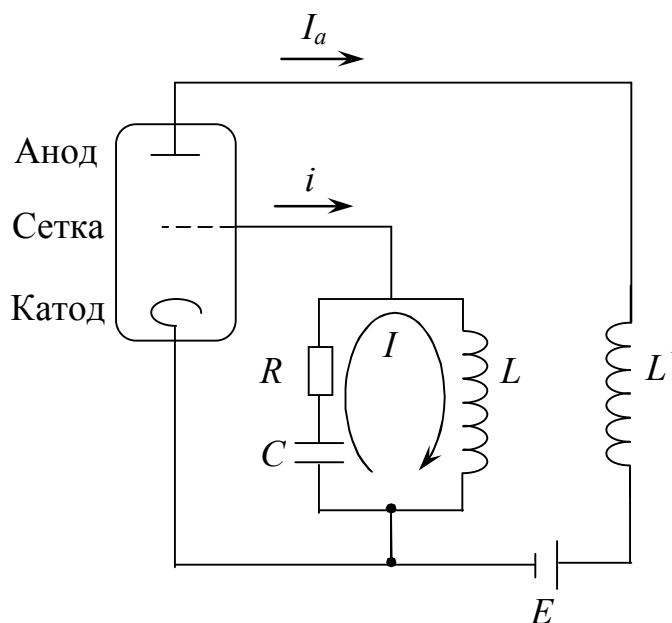


Рис. 2

Генератор Ван-дер-Поля (ГВДП) представляет собой радиотехническое устройство для получения электрических колебаний. ГВДП представляет собой колебательный контур, состоящий из активного сопротивления R , емкости C и индуктивности L , который включен между сеткой и катодом электронной лампы- триода (см. рис. 2). В анодную цепь триода (цепь от катода к аноду) включены анодная батарея E и индуктивность L' , намотанная поверх индуктивности L .

Нелинейным элементом в ГВДП является электронная лампа- триод. Основное свойство триода заключается в том, что малые изменения потенциала сетки U относительно катода сильно и нелинейно влияют на ток от катода к аноду (анодный ток I_a). Эта зависимость представляется анодно-сеточной характеристикой $I_a(U)$. Для удобства анодно-сеточную характеристику описывают формулой

$$I_a(U) = I_0 + S_0 U - S_2 U^3 . \quad (40)$$

Здесь I_0, S_0, S_2 – параметры лампы.

Области, в которых уравнение (40) существенно отличается от реальной характеристики лампы, обычно не достигаются при работе генератора. Анодный ток I_a через взаимную индуктивность M влияет на колебательный контур. Если L и L' ориентированы так, что рост I_a ведет к положительной добавке к U , то говорят о положительной обратной связи между U и I_a (ПОС). Характеристикой ПОС является взаимная индуктивность M . Благодаря ПОС колебания, случайно возникшие в контуре, усиливаются лампой и их амплитуда растет за счет энергии, получаемой из источника питания. При большой амплитуде $I_a \rightarrow I_{\max}$ и дальнейший рост амплитуды дает лишь рост потерь

в R . В итоге устанавливается стационарный режим колебаний, в котором все потери энергии в точности компенсирует анодная батарея.

В соответствии с уравнением Максвелла

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (41)$$

для колебательного контура имеем:

$$IR + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = -M \frac{dI_a}{dt}. \quad (42)$$

Так как сеточный ток i очень мал по сравнению с током в колебательном контуре I , то ток в контуре – это ток разрядки конденсатора:

$$I = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{dU}{dt}. \quad (43)$$

Знак минус в выражении (43) указывает на то, что разрядка конденсатора C , уменьшающая U , приводит к положительному значению I при выбранном его направлении.

Далее

$$\frac{dI_a}{dt} = \frac{dI_a}{dU} \frac{dU}{dt} = S(U) \frac{dU}{dt}. \quad (44)$$

Величина $S(U) = \frac{dI_a}{dU}$ называется крутизной характеристики лампы и для нее с помощью выражения (40) можно получить

$$S(U) = S_0 - 3S_2 U^2. \quad (45)$$

Сделаем замену переменной t в уравнении (42) по правилу:

$$\tau = \omega_0 t. \quad (46)$$

В итоге получаем

$$\ddot{U} + \omega_0 [U^2 - V^2] \beta MS_2 \dot{U} + U = 0, \quad (47)$$

где

$$V = \sqrt{\frac{MS_0 - RC}{3MS_2}}. \quad (48)$$

Две точки и одна точка над переменной U означают вторую и первую производные по безразмерному времени τ . Величина в квадратных скобках представляет собой эффективное затухание системы. Нас интересует случай, когда при малых амплитудах колебаний U затухание отрицательно. Из (47) следует, что для этого необходимо

$$MS_0 > RC. \quad (49)$$

Таким образом, колебания в колебательном контуре будут самовозбуждаться, если:

- а) обратная связь, характеризуемая величиной M , положительна и достаточно велика;
- б) крутизна характеристики лампы при малых анодных токах достаточно велика;
- с) диссипация энергии в контуре, определяемая значением R , не слишком велика.

Очевидно, что при $U^2 < V^2$ эффективное затухание отрицательно и система получает энергию. При $U^2 > V^2$ эффективное затухание положительно и система отдает энергию. Очевидно, что при автоколебаниях энергии, отдаваемые и получаемые в течение периода, равны. Для этого необходимо, чтобы величина U^2 колебалась вокруг значения V^2 . Таким образом, величина V характеризует амплитуду автоколебаний. Перепишем уравнение (47) в новой безразмерной переменной $x = U/V$:

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} [x^2 - 1] = 0 \quad (50)$$

Здесь μ - параметр, характеризующий нелинейность и

$$\mu = 3MS_2\omega_0V^2 \quad (51)$$

При $\mu=0$ система эквивалентна линейному осциллятору без затухания; при $\mu \ll 1$ автоколебания по форме будут мало отличаться от гармонических; при $\mu \gg 1$ форма колебаний будет существенно отличаться от экспоненциальной.

2. Порядок выполнения работы

Написать программу – **VDP – generator** приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения (50) с заданными начальными условиями, используя алгоритм Эйлера. Графики функций $x(\tau)$, $v(\tau)=\dot{x}(\tau)$, $v(x)$ представить на дисплее компьютера.

Указание

Ниже представлен алгоритм программы **VDP – generator** построения графиков функций $x(\tau)$, $v(\tau)=\dot{x}(\tau)$, $v(x)$.

1. Ввести начальные значения $x(\tau = 0) = x_0$, $v(\tau = 0) = v_0$.
2. Ввести величины μ, deltat .
3. Открыть файл для записи данных с помощью оператора OPEN.
4. Организовать счетчик, индицирующий значения функций в текущий момент времени.

5. Блок рисования зависимости $x(\tau)$.
6. Блок рисования зависимости $v(\tau)$.
7. Блок рисования зависимости $v(x)$.

В приложении приведен фрагмент программы **VDP – generator** рисования зависимости $x = x(\tau)$. Блоки рисования зависимостей $v = v(\tau), v = v(x)$ выполнить самостоятельно.

3. Контрольные вопросы

- 3.1. Автоколебания.
- 3.2. Устройство генератора Ван-дер-Поля и принцип его работы.
- 3.3. Дифференциальное уравнение генератора Ван-дер-Поля и его вывод.
- 3.4. Решения дифференциального уравнения генератора Ван-дер-Поля при малых и больших значениях параметра нелинейности.
- 3.5. Фазовый портрет генератора Ван-дер-Поля.
- 3.6. Релаксационные колебания.
- 3.7. Модифицируйте программу **VDP – generator** таким образом, чтобы получить решения нелинейного уравнения Рэля.

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} [\dot{x}^2 - 1] = 0$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4 ИССЛЕДОВАНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ФЕРХЮЛЬСТА

1. Введение

Обозначим через P_i численность популяции в i -том поколении. Простую модель развития популяции можно представить в виде

$$P_{i+1} = \lambda P_i, \quad (52)$$

где $\lambda = const, \lambda > 0, i = 0, 1, 2, 3, \dots$. Такое линейное уравнение приводит к геометрическому росту популяции. В более реалистической модели численность популяции ограничивается пропускной способностью окружающей среды и

$$P_{i+1} = \lambda P_i - \mu P_i^2 = P_i(\lambda - \mu P_i). \quad (53)$$

Второе слагаемое в (53) соответствует уменьшению естественного прироста.

Для удобства «перемасштабируем» численность популяции в соответствии с правилом

$$P_i = \frac{\lambda}{\mu} x_i.$$

В результате получаем

$$x_{i+1} = \lambda x_i (1 - x_i). \quad (54)$$

Это и есть простое одномерное нелинейное дискретное отображение Ферхюльста. Уравнение (54) в литературе еще называют логистическим уравнением или квадратичным итератором. Величину $r = (1/4)\lambda$ в литературе принято называть параметром роста. Уравнение (54) можно представить в виде

$$x_{i+1} = f(x_i), \quad (55)$$

$$f(x) = \lambda x(1 - x). \quad (56)$$

Заметим, что если $x_i > 1$, то значение $x_{i+1} < 0$. Поэтому, чтобы избежать нефизической ситуации, наложим ограничения на переменную x и параметр роста r :

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (57)$$

Значение x_0 называют источником отображения или стартовым значением, а значения x_i — итерированными значениями отображения.

В большинстве случаев несколько начальных итераций ведут себя странным образом, но потом устанавливается некоторая закономерность. Начальный отрезок последовательности называется переходным режимом, а остальная часть называется установившимся режимом. Последовательность значений x_i называется орбитой отображения.

Точка x^* называется неподвижной точкой отображения (55), если $x^* = f(x^*)$, т.е. если $x_i = x^*$, то все x_n при $n > i$ также равны x^* .

Так же, как и для непрерывных систем, неподвижные точки могут быть устойчивыми и неустойчивыми.

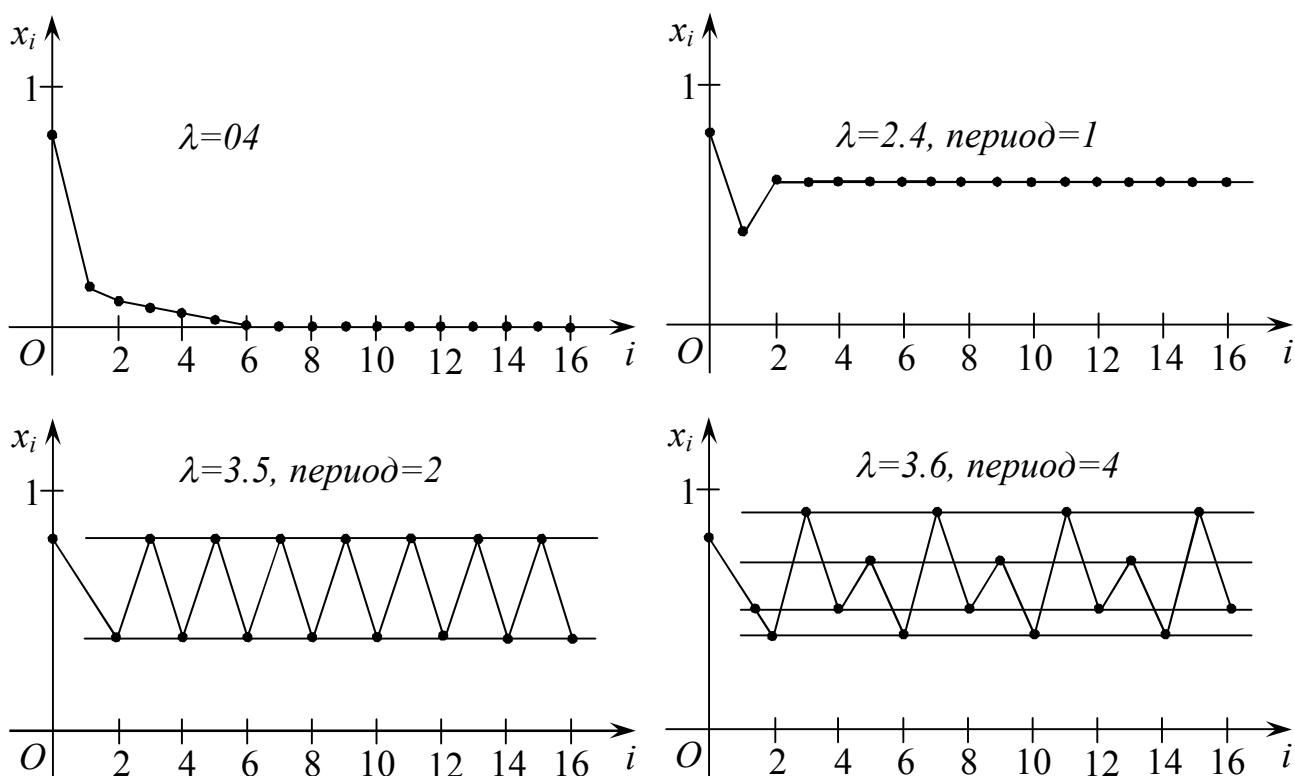


Рис. 3. Графики итерированных значений x_i в зависимости от номера итерации i для случаев $\lambda=0.4$, $\lambda=2.4$, $\lambda=3.5$, $\lambda=3.6$. (схематично).

Неподвижная точка x^* будет устойчивой точкой, если последовательность (x_n) будет сходиться к неподвижной точке x^* . В этом случае величина $|M| < 1$, где $M = \left[\frac{df(x)}{dx} \right]$ при $x = x^*$, т.е. величина наклона касательной к функции $f(x)$ в точке $x = x^*$ должна быть меньше 45° . Если же $|M| > 1$, то отклонение точки x_i от x^* с каждым шагом итерации увеличивается в M раз и неподвижная точка x^* неустойчива. В этом случае наклон касательной к функции $f(x)$ в точке $x = x^*$ будет уже более 45° .

Циклом порядка m дискретного отображения $x_{i+1} = f(x_i)$ называется такая последовательность точек $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$, что

$$x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_m = f(x_{m-1}), x_1 = f(x_m). \quad (56)$$

Рассмотрим отображение Ферхюльста (54). Оно имеет две неподвижные точки : $x^* = 0$ и $x^* = (\lambda - 1)/\lambda$. Точка $x^* = 0$ является устойчивой неподвижной точкой при $|\lambda| < 1$. Точка $x^* = (\lambda - 1)/\lambda$ устойчива при $1 < \lambda < 3$.

А. Если принять значение r равным $r = 0.1$ ($\lambda = 0.4$) и итерации начинать из любой точки источника $x_0 \neq 0$ и $x_0 \neq 1$, то нетрудно увидеть, что итерационный процесс сходится к неподвижной точке $x^* = 0$ (см. рис. 3). Эта неподвижная точка устойчива и, говорят, что она образует аттрактор с периодом, равным 1.

В. Если принять значение r равным $r = 0.6$ ($\lambda = 2.4$) и итерации начинать из любой точки источника $x_0 \neq 0$ и $x_0 \neq 1$, то нетрудно увидеть, что итерационный процесс сходится к неподвижной точке $x^* = 7/12$ (см. рис. 3). Эта неподвижная точка устойчива и она также образует аттрактор с периодом, равным 1.

С. Если параметр r становится чуть больше значения $r = 0.75$ ($\lambda > 3$), то после переходного режима x осциллирует между двумя значениями x_1^* и x_2^* (см. рис. 3). Вместо устойчивого цикла с периодом 1, соответствующего одной неподвижной точке, у системы появляется устойчивый цикл с периодом 2. Расщепление одной неподвижной точки на несколько (в данном случае на две) называют бифуркацией. Неподвижные точки x_1^* и x_2^* образуют устойчивый аттрактор с периодом 2, т.е. в этом случае каждая вторая итерация принимает то же самое значение и

$$x_i = f[f(x_i)].$$

Говорят, что аттракторы функции $f(x)$ являются неподвижными точками функции $g(x) = f(f(x))$.

Д. Пусть $0.75 < r < 1$ ($3 < \lambda < 4$). При дальнейшем росте r величина наклона неподвижных точек $g(x)$ достигает значения равного, 1, и неподвижные точки удваиваются. Теперь период функции f становится равным 4 (см. рис. 3) и каждая четвертая итерация принимает то же самое значение и

$$x_i = f(f(f(f(x_i)))) = g(g(x_i)) = h(x_i).$$

Аттракторы функции $g(x)$ являются неподвижными точками функции $h(x)$. Эти четыре неподвижные точки также в конце концов удваиваются и наблюдается удвоение периода по схеме

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow \text{и т.д.}$$

График итерированных значений x_i в зависимости от параметра роста r имеет вид, изображенный на рис. 4.

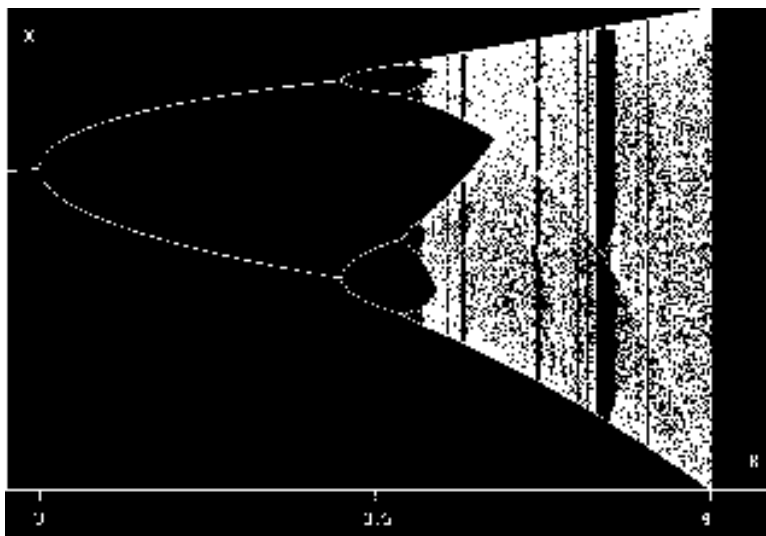


Рис.4. График итерированных значений x_i в зависимости от параметра роста r .

Фейгенбаум показал, что величина δ , определяемая как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}} = \delta = 4.6692016 \quad (57)$$

есть универсальная постоянная, не зависящая от конкретного вида функции $f(x)$. При $r > r_c = 0.892486$ процесс удвоения заканчивается и происходит переход к хаотическому режиму (светлая область на графике). Следует отметить, что внутри областей хаоса имеются узкие окна периодического движения.

Удвоение периода столь же типично для многих хаотических систем, как и универсальная постоянная Фейгенбаума. Это число измерялось экспериментально на ряде физических систем, демонстрирующих удвоение периода и возникновение хаоса. Такие системы известны в гидродинамике (H_2O , He , Hg), электронике (диоды, транзисторы), лазерной технике, физике твердого тела (джозефсоновские переходы) и акустике (He).

2. Порядок выполнения работы

В приложении приведены программа ***FERHULST – graph1*** построения графика зависимости итерированного значения x_i от номера итерации i и программа ***FERHULST – graph2*** построения графика зависимости итерированного значения x_i от параметра роста r .

В программе ***FERHULST-graph1*** каждая итерация наносится на график.

В программе *FERHULST-graph2* для каждого значения r первые 100 итераций были оставлены в «тени», чтобы процесс успел выйти в свой аттрактор, который характеризует асимптотическое поведение, не включающее особенности переходного режима, а следующие 300 итераций были нанесены на графике для того, чтобы показать природу этого аттрактора.

- 2.1. Используйте программу *FERHULST-graph1* и покажите графически, что:
- при $r < 0.75$ у функции существует единственная устойчивая неподвижная точка;
 - при $0.75 < r < 0.862$ у функции существуют две единственные устойчивые неподвижные точки;
 - при $0.862 < r < 0.88$ у функции существуют четыре единственные устойчивые неподвижные точки;
 - при $r > 0.892486$ у функции происходит переход к хаотическому режиму, причем внутри области хаоса, например при $r=0.9575$, у функции вновь наступает периодический режим.

2.2. Используйте программу *FERHULST – graph2* и определите приближенное значение универсальной постоянной Фейгенбаума для отображения Ферхюльста.

- 2.3. Модифицируйте программу *FERHULST – graph2* для построения графика зависимости значения функции f от параметра роста r отображений:
- $f(x) = x \exp(r(1 - x))$ (отображение Мэйя);
 - $f(x) = (r - (2x - 1)^4)$.

3. Контрольные вопросы

- Одномерное отображение Ферхюльста. Параметр роста отображения.
- Неподвижные точки дискретного отображения и их устойчивость.
- Определение цикла дискретного отображения. Понятие аттрактора с периодом 1, 2 и т.д.
- Вид графика итерированных значений x отображения Ферхюльста в зависимости от параметра роста отображения r .
- Вид графика итерированных значений x отображения Ферхюльста в зависимости от номера итерации i при $4r < 1$, $3 < 4r < 4$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5 ИССЛЕДОВАНИЕ МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА И МАНДЕЛЬБРОТА

1. Введение

A. Квадратичное отображение комплексной плоскости

Пусть $z = x + iy$ комплексное число. Отображение вида

$$z_{n+1} = z_n^2 + C \quad (58)$$

называют квадратичным отображением комплексной плоскости. Здесь $z_n = x_n + iy_n$, $z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $C = C' + iC''$ — комплексная константа. Поскольку $z_n^2 = x_n^2 - y_n^2 + 2ix_ny_n$ комплексное отображение (58) можно заменить действительным двумерным отображением

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + C' \\ y_{n+1} = 2x_ny_n + C'' \end{cases} \quad (59)$$

B. Динамика отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$ при $C = 0$

В тригонометрической форме отображение $z_{n+1} = z_n^2 + C$ при $C=0$ можно представить в виде

$$z_{n+1} = z_n^2 = |z_n|^2 \exp(2i\varphi). \quad (60)$$

Очевидно, что $z_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если $|z_1| < 1$ и $z_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, если $|z_1| > 1$.

Говорят, что отображение (60) имеет два аттрактора — точки $z=0$ и $z=\infty$. Круг $|z| < 1$ называется бассейном первого аттрактора. Вся остальная область комплексной плоскости называется бассейном второго аттрактора.

C. Неподвижная точка отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$

Точка z^* называется неподвижной точкой отображения $z_{n+1} = f(z_n)$, если $z^* = f(z^*)$.

Неподвижная точка отображения (58) выражается через комплексный параметр C :

$$z_{1,2}^* = 0.5(1 \pm \sqrt{1 - 4C}). \quad (61)$$

Нетрудно показать, что условие устойчивости двумерного отображения (58) оказывается таким же, что и для одномерного:

$$\left| \frac{df}{dz} \right|_{z=z^*} = 2|z^*| < 1 \quad \text{или} \quad |z^*| < 1/2. \quad (62)$$

Последняя запись означает, что областью устойчивости неподвижной точки z^* является круг с радиусом, равным 0.5, на плоскости комплексной переменной z^* (рис. 5). На плоскости комплексной переменной z область $|z^*| < 1/2$ будет представлять собой кардиоиду с внутренней областью (рис. 6).

Если C находится внутри кардиоиды, то имеется устойчивая неподвижная, к которой притягивается последовательность, стартующая с не слишком больших z . Если же C находится вне кардиоиды, последовательность (z) уйдет на бесконечность.

D. Множество Жюлиа и его компьютерное построение

Рассмотрим область комплексной переменной z , ограниченную неравенствами

$$\begin{cases} -1.5 \leq \operatorname{Re} z = x \leq 1.5 \\ -1.5 \leq \operatorname{Im} z = y \leq 1.5 \end{cases}. \quad (63)$$

Выберем решетку точек этой области.

Зададим на плоскости комплексной переменной z (плоскости xy) круг с радиусом R , который назовем радиусом убегания. Зададим фиксированное значение комплексного параметра C . Теперь исследуем каждую точку области (63).

Возьмем в качестве стартовой точку $x_{\min} = -1.5 = x_0, y_{\min} = -1.5 = y_0$.

Если за достаточно большое число итераций (например, за 512) последовательность (59) выходит за пределы радиуса убегания, т.е. $x_{512}^2 + y_{512}^2 > R^2$, то точка (x_0, y_0) будет принадлежать бассейну бесконечно удаленной точки. В этом случае окрашиваем эту точку, например, в белый цвет. Если за указанное большое число итераций последовательность (59) не выходит за пределы радиуса убегания, т.е. $x_{512}^2 + y_{512}^2 < R^2$, то принимается, что точка (x_0, y_0) не будет принадлежать бассейну бесконечно удаленной точки, и тогда окрашиваем эту точку, например, в черный цвет.

Такое же исследование проводим с другими точками выбранной решетки точек области (63). После компьютерной обработки область (63) комплексной переменной z окрасится так, как показано на рис.7а и рис.7б. Точки области (63), оказавшиеся на границе черного и белого цветов, образуют множество Жюлиа.

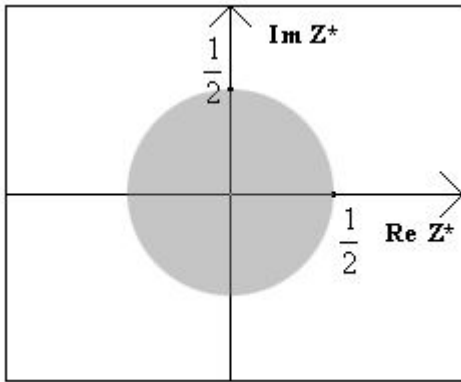


Рис. 5. Область устойчивости неподвижной точки z^* на плоскости комплексной переменной z .

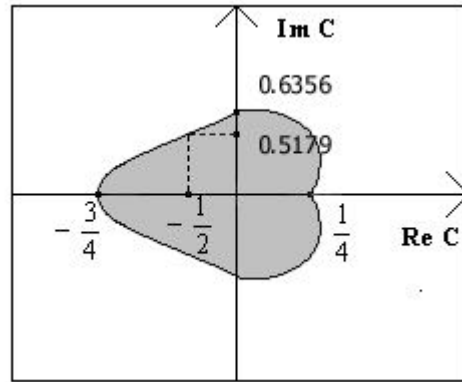


Рис. 6. Область устойчивости неподвижной точки z^* на плоскости комплексной переменной C .

Как видно из рис. 7а и рис. 7б, при $C = 0$ множество Жюлиа (граница бассейна бесконечно удаленной точки) – окружность. При $C \neq 0$ множество Жюлиа – деформированная окружность. С приближением комплексного параметра C к границе кардиоиды граница бассейна становится все более изрезанной.

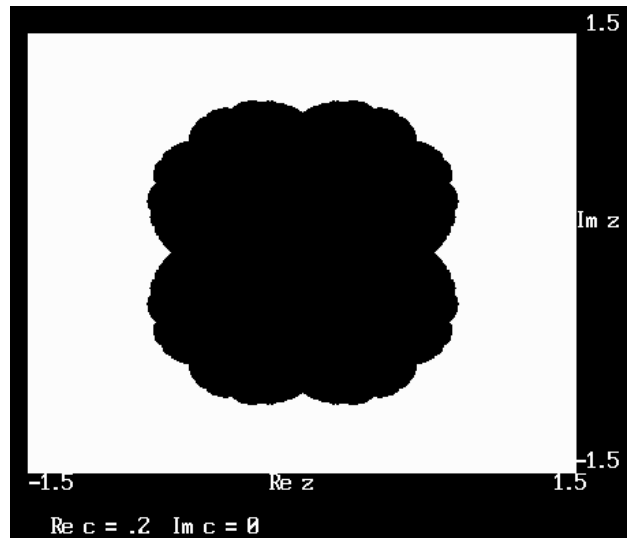
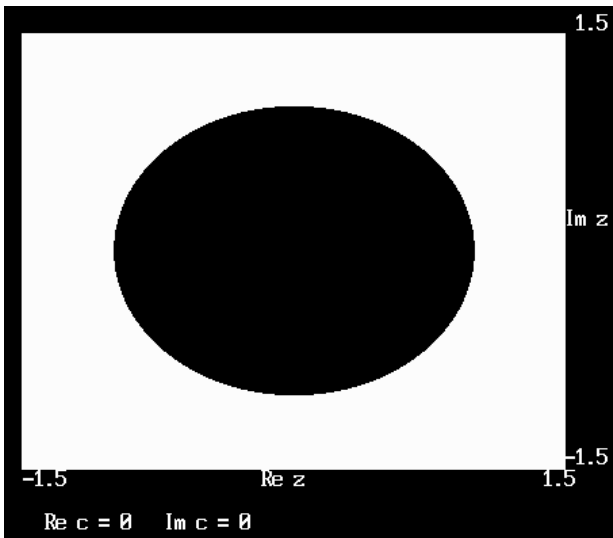


Рис. 7а. Различные формы множества Жюлиа

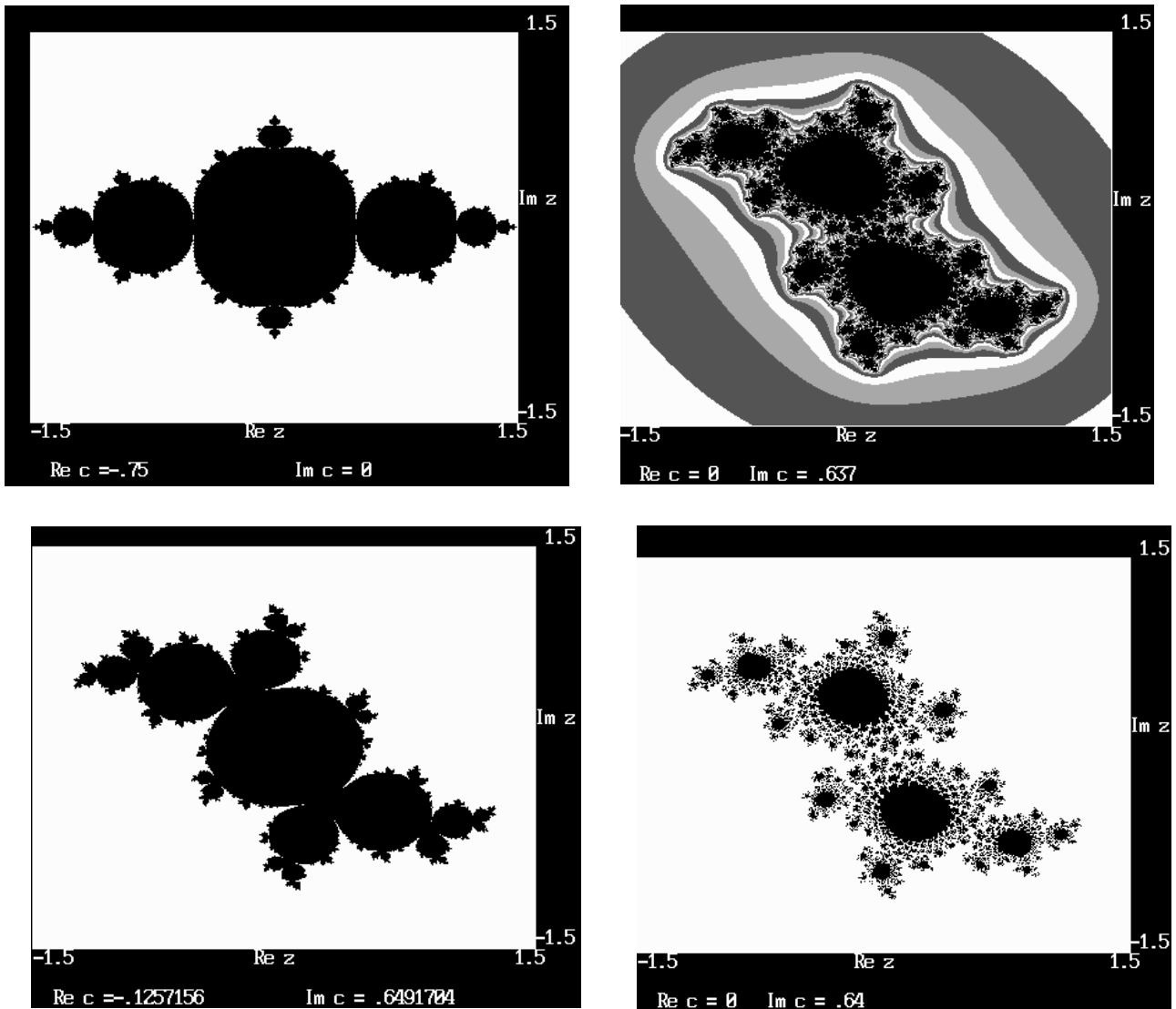


Рис. 76. Различные формы множества Жюлиа

Взяв C за пределами кардиоиды, мы не обязательно получим расходящуюся последовательность. Как и в случае преобразования Ферхюльста, потеря устойчивости неподвижной точкой может сопровождаться рождением устойчивого цикла. Поэтому и при комплексном параметре C , не принадлежащем области кардиоиды, бассейн бесконечно удаленной точки не обязательно займет всю плоскость z . Могут существовать области притяжения точек, составляющих цикл, которые в этом случае образуют сложную структуру.

Приведенное выше определение множества Жюлиа как границы бассейна бесконечно удаленной точки годится для любого рационального отображения

$$z^* = f(z^*), \text{ где } f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

$P(z), Q(z)$ – многочлены, не имеющие общих делителей, причем один из них имеет степень выше 1.

Итак, в зависимости от комплексного параметра C множество Жюлиа J_R может представлять собой:

- 1) если C лежит внутри главной кардиоиды, J_R — деформированная окружность;
- 2) если C лежит внутри одной из почек кардиоиды, то J_R состоит из бесконечного множества слепленных друг с другом деформированных окружностей, каждая из которых окружает точку, принадлежащую циклу;
- 3) если C — точка прорастания почки, то множество Жюлиа имеет «усики», сходящиеся в неподвижной точке;
- 4) если C не принадлежит области кардиоиды, то множество Жюлиа «взрывается», рассыпаясь на бесчисленное множество «пылинок».

Е. Множество Мандельброта и его компьютерное построение

Рассмотрим область комплексной плоскости C , ограниченную неравенствами

$$\begin{cases} -2.0 \leq \operatorname{Re} C = C' \leq 0.5 \\ -1.5 \leq \operatorname{Im} C = C'' \leq 1.5 \end{cases} \quad (64)$$

Аналогично, как и при исследовании множества Жюлиа, выбираем решетку точек комплексной области (64), задаем радиус убегания R и для всех точек области (64) осуществляем большое число итераций последовательности (59).

Рассмотрим точку $C'_0 = C'_{\min}, C''_0 = C''_{\min}$. Если за большое число итераций (например, за 512) последовательность (59), стартующая с точки $z = 0$, не выходит за пределы радиуса убегания, т.е. $x_{512}^2 + y_{512}^2 < R^2$, то точка (C'_0, C''_0) принадлежит множеству Мандельброта, и окрашиваем эту точку, например, в черный цвет. Если за указанное число итераций последовательность (59), стартующая с точки $z = 0$, выходит за пределы радиуса убегания, т.е. $x_{512}^2 + y_{512}^2 > R^2$, то точка (C'_0, C''_0) не принадлежит множеству Мандельброта и окрашиваем эту точку, например, в белый цвет.

Таким же образом исследуем другие точки выбранной решетки в области (64). После компьютерной обработки область (64) комплексной переменной C окрасится так, как показано на рис.8. Точки области (64), окрасившиеся в черный цвет, образовали множество Мандельброта. В нашем случае множество Мандельброта — это кардиоида с ее внутренней областью.

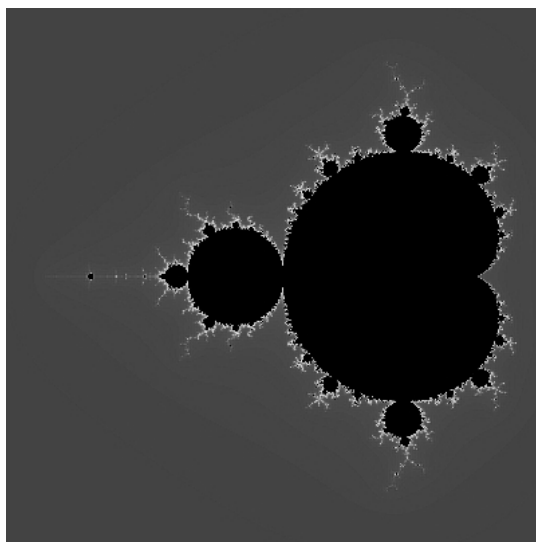


Рис.8. Множество Мандельброта

Множество Мандельброта можно определить как множество значений параметра C , при которых последовательность, стартующая с точки $z=0$, не уходит на бесконечность.

Основная часть множества Мандельброта — это кардиоида, внутри которой отображение $z_{n+1} = z_n^2 + C$ имеет устойчивую неподвижную точку. К этой основной кардиоиде присоединяются «почки», соответствующие устойчивым циклам. На каждой почке есть почки меньшего размера, на них — еще меньше, и так до бесконечности.

Другое, более общее определение множества Мандельброта: множество Мандельброта — это множество значений параметра C , при котором соответствующее множество Жюлиа связно (не распадается на отдельные кусочки).

2. Порядок выполнения работы

В приложении приведены программа *JULIA – graph* построения множества Жюлиа в заданной области комплексной переменной z для отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$ и программа *MANDELBROT – graph* построения множества Мандельброта в заданной области комплексного параметра C для отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$.

2.1. Получите изображение множества Жюлиа для отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$, соответствующего следующим значениям комплексного параметра C :

а) $C' = 0, C'' = 0$; б) $C' = 0.1, C'' = 0$; в) $C' = -0.75, C'' = 0$;

г) $C' = -0.1257156, C'' = 0.6491704$.

2.2. Получите изображение множества Мандельброта для отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$ в области (64) комплексной плоскости C .

2.3. Получите изображение множества Жюлиа для отображения Хенона

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

2.4. Получите изображение множества Жюлиа для отображения $z_{n+1} = z_n^2 + \lambda z_n$, $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$, $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$.

3. Контрольные вопросы

- 3.1. Квадратичное отображение комплексной плоскости.
- 3.2. Динамика отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$ при $C = 0$.
- 3.3. неподвижная точка отображения $z_{n+1} = z_n^2 + C$. Критерий устойчивости неподвижной точки.
- 3.4. Множество Жюлиа. Зависимость формы множества Жюлиа от параметра C .
- 3.4. Множество Мандельброта. Основная часть множества Мандельброта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев Н.Н. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1963.
2. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987.
3. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976.
4. Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. – М.: Мир, 1993.
5. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. – М.: ИЛ, 1953.
6. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. Ч.1,2. – М.: Мир, 1990.
7. Пул Ч. Справочное руководство по физике. – М.: Мир, 2001.
8. Зельднер Г. Программируем на языке Quik BASIC 4.5. – М.: ABF, 1997.
9. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. I. Механика. – М.: Наука, 1989.
10. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. III. Электричество. – М.: Наука, 1977.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Распечатки фрагментов программ лабораторных работ по курсу «Нелинейная динамика» на языке Quick BASIC.

А. Программа oscillator

```
REM моделирование линейного осциллятора
CONST PI = 3.1415926#
INPUT "Чему равно начальное значение Y "; y0
INPUT "Чему равна начальная скорость "; v0
INPUT "Чему равна собственная частота "; omega
period = 2 * PI / omega
INPUT "Чему равно отношение затухания собственной частоте"; delay
gamma = delay * omega
INPUT "Какую долю периода должен составлять один шаг по времени "; dolja
deltaT = dolja * period
INPUT "Сколько периодов просчитывать "; nperiods
SCREEN 12
PRINT "МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА "
OPEN "linosc.dat" FOR OUTPUT AS #1
VIEW (320, 1)-(638, 235), 8, 12
amplitude = SQR(y0 * y0 + (v0 + y0 * gamma / omega) ^ 2)
maxtime = nperiods * period
WINDOW (0, amplitude * 1.2)-(maxtime, -amplitude * 1.2)
LINE (0, -amplitude)-(0, amplitude)
LINE (0, 0)-(maxtime, 0)
LOCATE 2, 42
PRINT "y"
LOCATE 9, 79
PRINT "t"
yold = y0
vold = v0
FOR i = 1 TO nperiods / dolja
    vnew = vold - omega * omega * yold * deltaT - 2 * gamma * vold * deltaT
    ynew = yold + vnew * deltaT
    PRINT #1, i * deltaT, ynew, vnew
    PSET (i * deltaT, ynew), 10
    yold = ynew
    vold = vnew
NEXT i
CLOSE #1
```

Б. Программа LV – model

```
CLS
PRINT "В равновесии экосистема леса поддерживала 50 лис и 1000 зайцев."
haresEq = 1000
foxesEq = 50
PRINT "После засухи экосистема леса вышла из равновесия"
INPUT "После этого зайцев стало (впишите, сколько) ", hares0
IF hares0 = haresEq THEN hares0 = hares0 * 1.02
INPUT "? лис стало (впишите, сколько) ", foxes0
IF foxes0 = foxesEq THEN foxes0 = foxes0 * 1.02
hares0 = hares0 / haresEq
foxes0 = foxes0 / foxesEq
beta = .3 'отношение коэффициентов естественного прироста зайцев и лис
deltaTau = .001
```

```

PRINT "Дальше экологическая жизнь разворачивалась так:"
SLEEP 2
OPEN "LOTKA.DAT" FOR OUTPUT AS #1
haresOld = hares0
foxesOld = foxes0
haresMax = 0
foxesMax = 0
CLS
PRINT "Время", "Зайцы", "Лисы"
DO
    tau = tau + deltaTau
    haresNew = haresOld + (1 - foxesOld) * haresOld * deltaTau
    foxesNew = foxesOld + beta * (haresNew - 1) * foxesOld * deltaTau
    IF haresNew > haresMax THEN haresMax = haresNew
    IF foxesNew > foxesMax THEN foxesMax = foxesNew
    PRINT #1, tau, haresNew, foxesNew
    LOCATE 3, 1
    PRINT USING "##.###"; tau
    LOCATE 3, 15
    PRINT USING "#####"; haresNew * haresEq
    LOCATE 3, 29
    PRINT USING "#####"; foxesNew * foxesEq
    IF (haresNew - hares0) * (haresOld - hares0) < 0 AND (foxesNew - foxes0) *
(foxesOld - foxes0) < 0 THEN EXIT DO
    haresOld = haresNew
    foxesOld = foxesNew
LOOP
SCREEN 12
VIEW (320, 1)-(638, 240), 3, 5
WINDOW (tau * (-.2), haresMax * 1.2)-(tau * 1.2, haresMax * (-.2))
CLOSE #1
OPEN "lotka.dat" FOR INPUT AS #1
LINE (0, haresMax)-(0, 0), 0
LINE (0, 0)-(tau, 0), 0
LOCATE 2, 41
PRINT "зайцы"
LOCATE 14, 79
PRINT "т"
DO UNTIL (EOF(1))
    INPUT #1, time, hares, foxes
    PSET (time, hares)
LOOP
CLOSE #1

```

В. Программа VDP – generator

```

CLS
INPUT "ввести параметр нелинейности"; mu
x0 = 1: v0 = 0
deltatau = .01
deltax = .01
xexitold = x0: texit = 0
xold = x0: vold = v0
xmax = 0: vmax = 0
OPEN "vand.dat" FOR OUTPUT AS #1
SCREEN 12
PRINT "время", "x", "v"
DO
tau = tau + deltatau

```

```

vnew = vold - mu * (xold * xold - 1) * vold * deltatau - xold * deltatau
xnew = xold + vnew * deltatau
IF xnew > xmax THEN xmax = xnew
IF vnew > vmax THEN vmax = vnew
PRINT #1, tau, xnew, vnew
LOCATE 3, 1
PRINT USING "##.###"; tau
LOCATE 3, 15
PRINT USING "##.###"; xnew
LOCATE 3, 30
PRINT USING "##.###"; vnew
IF vold > 0 AND vnew < 0 THEN
xexitold = xexitnew
xexitnew = xnew
period = tau - texit
texit = tau
END IF
vold = vnew
xold = xnew
IF ABS(xexitnew - xexitold) < deltax THEN EXIT DO
LOOP
CLOSE #1
VIEW (320, 1)-(637, 238), 8, 12
WINDOW (0, xmax * 1.2)-(tau, -xmax * 1.2)
OPEN "vand.dat" FOR INPUT AS #1
LINE (0, xmax)-(0, -xmax)
LOCATE 2, 42
PRINT "x"
LINE (0, 0)-(tau, 0)
LOCATE 9, 74
PRINT "time"
DO UNTIL (EOF(1))
INPUT #1, time, x, v
PSET (time, x)
LOOP
CLOSE #1

```

Г. Программа FERHULST – graph1

```

REM исследование отображения ферхюльста .
CLS
INPUT " введите значение lambda "; lambda
Xold = .7
SCREEN 12
WINDOW (0, 1)-(639, -.1)
LINE (0, 0)-(0, 1), 5
LINE (0, 0)-(639, 0), 5
LOCATE 2, 4
PRINT "x"
LOCATE 28, 79
PRINT "i"
FOR i = 1 TO 639 STEP 15
Xnew = lambda * Xold * (1 - Xold)
PSET (i, Xnew), 12
Xold = Xnew
NEXT i
END

```

Д. Программа *FERHULST* - *graph2*

```
REM исследование отображения фержюльста
CLS
SCREEN 12
lambdaMin = 2.9
lambdaMax = 4
  WINDOW (lambdaMin, 1)-(lambdaMax, -.1)
LINE (lambdaMin, 0)-(lambdaMax, 0)
LOCATE 28, 78
PRINT "lambda"
LINE (lambdaMin, 1)-(lambdaMin, 0)
LOCATE 2, 2
PRINT "x"
FOR lambda = lambdaMin TO lambdaMax STEP .1
LINE (lambda, 0)-(lambda, .03)
NEXT lambda
FOR lambda = lambdaMin TO lambdaMax STEP (lambdaMax - lambdaMin) / 640
Xold = .7
FOR i = 1 TO 100
Xnew = lambda * Xold * (1 - Xold)
Xold = Xnew
NEXT i

FOR i = 101 TO 400
Xnew = lambda * Xold * (1 - Xold)
Xold = Xnew
PSET (lambda, Xnew)
NEXT i
NEXT lambda
END
```

Е. Программа *JULIA* - *graph*

```
INPUT "ввести веществ часть", Rec
INPUT "ввести комплекс часть", Imc
xmin = -1.5: xmax = 1.5
ymin = -1.5: ymax = 1.5
radius = 10
rad2 = radius * radius
pixhor = 30
pixver = 30
SCREEN 12
VIEW (320 - pixhor \ 2, 240 - pixver \ 2)-(319 + pixhor \ 2, 239 + pixver \ 2)
WINDOW (0, pixver - 1)-(pixhor - 1, 0)
  deltax = (xmax - xmin) / pixhor
  deltay = (ymax - ymin) / pixver
FOR i = 0 TO pixhor - 1
FOR j = 0 TO pixver - 1
xold = xmin + i * deltax: xSq = xold * xold
yold = ymin + j * deltay: ySq = yold * yold
FOR k = 1 TO 512
xnew = xSq - ySq + Rec
  ynew = 2 * xold * yold + Imc
  xSq = xnew * xnew
  ySq = ynew * ynew
IF xSq + ySq > rad2 THEN GOTO 10 ELSE GOTO 100
10 PSET (i, j), 7: EXIT FOR
100 PSET (i, j), 1
  xold = xnew
```

```

        yold = ynew
    NEXT k
NEXT j
NEXT i
END

```

Ж. Программа MANDELBROT - graph

```

recmin = -2!: recmax = .5: imcmin = -1.5: imcmax = 1.5
colors = 512
limit = 10
msq = limit ^ 2
pixhor = 80
pixver = 80
SCREEN 12
IF pixhor > 640 THEN pixhor = 640
IF pixver > 480 THEN pixver = 480
VIEW (320 - pixhor \ 2, 240 - pixver \ 2)-(319 + pixhor \ 2, 239 + pixver \ 2)
WINDOW (0, pixver - 1)-(pixhor - 1, 0)
deltarec = (recmax - recmin) / pixhor
deltaimc = (imcmax - imcmin) / pixver

FOR i = 0 TO pixhor - 1
FOR j = 0 TO pixver - 1
recold = recmin + i * deltarec
imcold = imcmin + j * deltaimc
xold = 0: yold = 0
FOR k = 1 TO 512
IF k MOD 2 = 0 THEN tsvet = 0 ELSE tsvet = 7
xnew = xold * xold - yold * yold + recold
ynew = 2 * xold * yold + imcold
xsq = xnew * xnew
ysq = ynew * ynew
IF xsq + ysq > msq THEN PSET (i, j), tsvet: EXIT FOR
xold = xnew
yold = ynew
NEXT k
NEXT j
NEXT i
END

```

Юрий Александрович Померанцев
Владимир Владимирович Свиридов
Елена Игоревна Свиридова

